



Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iași
10.02.2023
Barem

Clasa a XII-a filieră tehnologică – secțiunea H1

Subiectul 1

- a) $2 * 4 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{2^2 + 4^2 + a^2} = 6 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = 4 \text{ sau } a = -4$ 1p
- b) $(x * y) * z = (\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}) * z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2a^2}$ 1p
- $x * (y * z) = x * (\sqrt{y^2 + z^2 + a^2}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2a^2}$ 1p
- $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y \in R \Rightarrow$ legea “ $*$ ”, este asociativă.....1p
- c) Dacă $a = 1$ folosind asociativitatea $(n * n) * n = \sqrt{3n^2 + 2}$ 1p
- $\sqrt{3n^2 + 2} < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 3n^2 + 2 < 20 \Leftrightarrow n^2 - 6 < 0$ 1p
- Deci $n \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ și $n \in Z \Rightarrow n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 1p

Subiectul 2

- a) $z = (i + 1) \circ (3 - i) = i(2 - i) + 1 = 2 + 2i \Rightarrow |z| = 2\sqrt{2}$ 1p
- b) $(a + bi) \circ (2 + i) = 3 + 4i \Leftrightarrow (a + bi - 1)(1 + i) + 1 = 3 + 4i \Leftrightarrow (a - b) + i(a + b - 1) = 3 + 4i$ 2p
- Deci $\begin{cases} a - b = 3 \\ a + b - 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \text{ și } b = 1$ 1p
- c) Ultimul număr este $1 \circ (1 + i) \circ (1 + 2i) \circ \dots \circ (1 + 28i)$ 1p
- Se observă că $1 \circ z = z \circ 1 = z, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ ultimul număr scris pe tablă este 12p

Subiectul 3

- a) funcția f este continuă pe $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 1p
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 1 \Rightarrow f$ continuă în $x = 0$ 1p
- Deci funcția f este continuă pe $R \Rightarrow$ funcția f admite primitive pe R 1p
- b) $\int_{-1}^0 xf(x)dx = \int_{-1}^0 xe^x dx + \int_{-1}^0 x^2 dx = 2\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right)$ 2p
- c) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} dx = \int_1^2 1 dx - 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{3}{2} - \ln 4$ 1p
- Din $\ln a^2 = \ln 4, a > 0 \Rightarrow a = 2$ 1p



Subiectul 4

a) $f_1(x) = \frac{2x+2}{x+1} = 2 \Rightarrow \int_0^1 x \cdot f_1(x) dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$ 1p

b) $f_2(x) = \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{x(x+1)+2}{x+1} = x + \frac{2}{x+1}$ 1p

Deci $\int f_2(x) dx = \int x dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln(x+1) + C \Rightarrow F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \ln(x+1) + C$ 1p

Finalizare $F_2(0) = 1 \Rightarrow C = 1$, deci $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \ln(x+1) + 1$ 1p

c) Fie F o primitivă a funcției $f_3 \Rightarrow F'(x) = f_3(x) = \frac{x^3+x+2}{x+1}$ 1p

$F''(x) = \left(\frac{x^3+x+2}{x+1} \right)' = \frac{(3x^2+1)(x+1) - (x^3+x+2)}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2-1}{(x+1)^2}$ 1p

Se observă că $2x^3+3x^2-1 = 2x^3+2x^2+x^2-1 = 2x^2(x+1) + (x-1)(x+1) = (x+1)^2(2x-1)$,

de unde rezultă că $F''(x) = 2x-1 \leq 0, \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow F$ concavă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 1p

SAU

c) Fie F o primitivă a funcției $f_3 \Rightarrow F'(x) = f_3(x) = \frac{x^3+x+2}{x+1}$ 1p

Observă că $f_3(x) = x^2 - x + 2$ 1p

de unde rezultă că $F''(x) = 2x-1 \leq 0, \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow F$ concavă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 1p