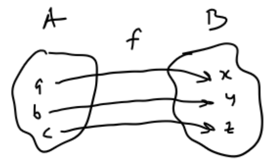
Functii

Fie A si B doua multimi nevide. Se spune ca s-a definit o functie pe multimea A cu valori in multimea B daca printr-un anumit procedeu (lege, corespondenta), notat cu f, fiecarui element x din A ii corespunde un singur element y din B.

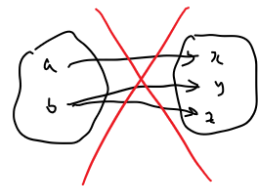
$f : A \to B$ citim f definita pe A cu valori in B

A - domeniul de definitie al functiei f
B - codomeniul sau domeniul valorilor functiei
f - lege de corespondenta
y=f(x) valoarea functiei in x sau imaginea lui x prin f
x - preimaginea lui y prin f
f(A) - multimea valorilor functiei f

$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$



(este functie)

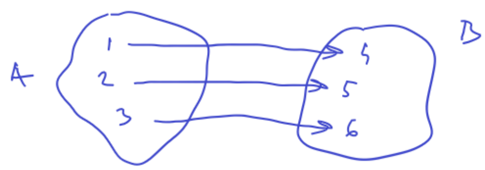


(NU este functie)

Modalitati de a defini o functie

1) Cand domeniul de definitie are un numar restrans de valori se defineste sintetic (tabel de valori, diagrama cu sageti)

x	1	2	3
$f(x)$	4	5	6



2) Cand domeniul de definitie este format din numar mare de elemente sau este infinit functia este data analitic (formula sau regula de asociere)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 3$

Obs. Functia f(x)=x se numeste functia identica.
Functia f(x)=c, c numar real, se numeste functia constanta.

Graficul unei functii

Se numeste graficul unei functii f multimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$

Restrictii ale unei functii

Definitie

$$\left.\begin{array}{l} f: E \to R \\ g: \underset{\substack{\cap \\ E}}{A} \to R,\ A \neq E,\ f(x) = g(x),\ \forall x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} g \text{ restrictie a lui } f \text{ la } A \\ f \text{ prelungirea lui } g \text{ de la } A \text{ la } E \end{array}$$

Doua functii $f: A \longrightarrow B$ si $g: E \longrightarrow F$ sunt egale daca sunt verificate simultan conditiile

a) A=E (au acelasi domeniu)
b) B=F (au acelasi codomeniu)
c) $f(x)=g(x),\ \forall x \in A$

Notatie: f=g

Doua functii f si g nu sunt egale si se scrie $f \neq g$, daca cel putin una din conditiile a), b), c) nu este satisfacuta

Functii numerice

Definitie

$$f : E \longrightarrow F, \quad E \subset \mathbb{R}, \; F \subset \mathbb{R}$$

functie reala de variabila reala sau functie numerica.

Proprietati generale ale functiilor

Functii marginite

Definitie

$f : D \to \mathbb{R}$ este functie marginita daca multimea valorilor este inclusa intr-un interval marginit de numere reale.

Definitii echivalente

f marginita daca $\exists\, a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b$, astfel incat $\operatorname{Im} f \subset [a,b]$

f marginita daca $\exists\, M > 0$, astfel incat $|f(x)| \leq M,\ \forall x \in D$

Functii pare, functii impare

Multimea D se numeste simetrica daca $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Functia $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, D simetrica, se numeste functie para daca $f(-x)=f(x), \forall x \in D$.

Propozitie

Graficul functiei pare $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ este simetric fata de axa Oy.

Functia $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, D simetrica, se numeste functie impara daca $f(-x)= - f(x), \forall x \in D$.

Propozitie

Graficul functiei impare $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ este simetric fata de originea reperului.

Functii periodice

O functie $f: D \longrightarrow R$ este periodica daca $\exists\, T \in R^*$ astfel incat $f(x+T) = f(x)$, $\forall\, x \in D$.

Numarul T se numeste perioada a functiei.
Daca printre perioadele strict pozitive ale lui f exista un cel mai mic T_0, atunci T_0 se numeste perioada principala.

Functii monotone

Functia $f: D \to R$ este crescatoare pe D daca $\forall\, x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

Functia $f: D \to R$ este descrescatoare pe D daca $\forall\, x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

Daca in loc de $\le$ $(\ge)$ avem $<$ $(>)$ atunci se numeste strict crescatoare (respectiv strict descrescatoare).

$$R = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$ se numeste raport de variatie, $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$.

Daca $R \ge 0$ atunci f este crescatoare pe D.
Daca $R \le 0$ atunci f este descrescatoare pe D.

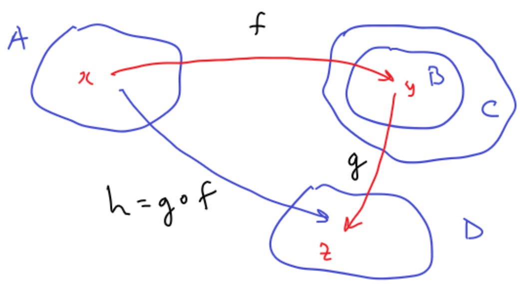
f monotona pe D daca este crescatoare sau descrescatoare pe D.

Compunerea functiilor

Fie functiile $f: A \longrightarrow B$, $B \subset C$, $g: C \longrightarrow D$.
Se numeste compusa functiei g cu functia f functia $h: A \longrightarrow D$ cu proprietatea $h(x) = g(f(x))$, $\forall\, x \in A$.

Compusa functiei g cu f se noteaza $h = g \circ f$.

Operatia prin care $h = g \circ f$ se obtine din g si f se numeste operatia de compunere a functiilor.



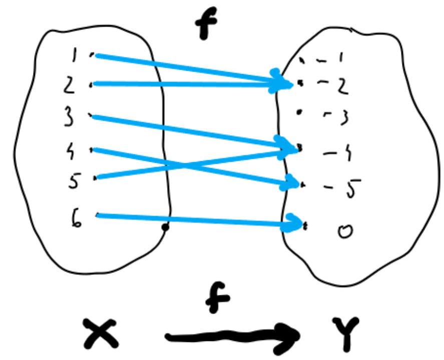
Aplicatie

Se considera functia f definita de diagrama urmatoare si multimile

A={2,3,5}
B={1,4,5,6}
C={4}, D={-2,-4,-5}
E={-2,-3,-4}
F={0}
G={-1,-5}

a) Sa se determine imaginea multimilor X, A, B, C prin functia f.

b) Sa se determine preimaginea multimilor D, E, F, G, Y prin functia f.



a) $f(A)=\{-2,-4\}$

$f(B)=\{-2,-5,-4,0\}$

$f(C)=\{-5\}$

$f(X)=\{-2,-4,-5,0\}$

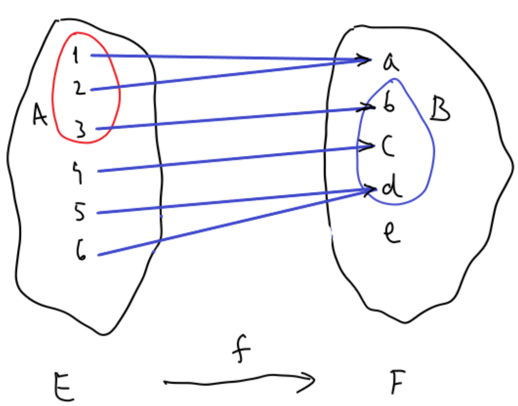
b) $f^{-1}(D)=\{x \mid x\in X,\ f(x)\in D\}=\{1,2,3,5,4\}$

$f^{-1}(E)=\{1,2,3,5\}$,

$f^{-1}(F)=\{6\}$

$f^{-1}(G)=\{\}$, $f^{-1}(Y)=\{x \mid x\in X,\ f(x)\in Y\}=\{1,2,3,4,5,6\}$

Aplicatie



$f(A)=\{a,b\}$ (imaginea multimii A prin f)

$f^{-1}(B)=\{3,4,5,6\}$ (preimaginea multimii B prin f)

$A=\{1,2,3\}\subset E$

$B=\{b,c,d\}\subset F$

Tema: pag. 103, E1-E6
pag. 104, E12, E13
pag. 108, E1

Aplicatie

Fie functia $f : R \longrightarrow R$, $f(x)=3x+7$. Sa se determine functia $g : R \longrightarrow R$ stiind ca $(g \circ f)(x)=-6x-5, \forall x \in R$.

Rezolvare:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{3x+7}_{u}) = g(u) = au + b = a(3x+7) + b = 3ax + 7a + b$$
$\forall x \in R$

Fie $g(x) = ax + b$

$$\left.\begin{array}{l}(g \circ f)(x) = -6x-5, \forall x \in R \\ (g \circ f)(x) = 3ax + 7a + b, \forall x \in R\end{array}\right\} \Rightarrow -6x - 5 = 3ax + 7a + b, \forall x \in R$$

$$\Rightarrow 3ax + 6x + 7a + b + 5 = 0, \forall x \in R \Rightarrow (3a+6)x + 7a + b + 5 = 0, \forall x \in R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 6 = 0 \\ 7a + b + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-6}{3} = -2 \\ 7 \cdot (-2) + b + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 + 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 9 \end{cases}$$

Deci $\underbrace{g(x) = -2x + 9}$.

Aplicatie

Sa se determine functia de gradul I $f : R \longrightarrow R$, stiind ca $f(1) = 3$ si $f(0) = 2$.

Rezolvare:

f functie de gradul I $\Rightarrow f(x) = ax + b, a \neq 0$

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x + 2$$

Aplicatie

Sa se determine intersectia cu axele de coordonate a graficului functiei $f(x) = \frac{1}{2}x - 3,\ x \in R$.

Rezolvare:

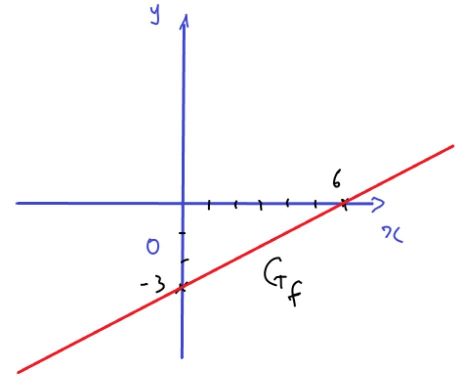
$Oy \cap G_f = \{(0,-3)\}$

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - 3 = -3$

$Ox \cap G_f = \{(6,0)\}$

$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x - 3 = 0 \ |\cdot 2 \Rightarrow x - 6 = 0$

$\Rightarrow x = 6$



Aplicatie

Se da functia $f : N^* \to N$, $f(n) = u(2^n)$ (ultima cifra a numarului 2^n). Sa se arate ca f este periodica si sa se precizeze perioada principala.

Rezolvare: $f(1) = u(2^1) = u(2) = 2$, $f(2) = u(2^2) = u(4) = 4$, $f(3) = u(2^3) = 8$

$f(4) = u(2^4) = u(16) = 6$, $f(5) = u(2^5) = u(32) = 2$, $f(6) = u(2^6) = u(64) = 4$

Se observa ca valorile functiei se repeta din 4 in 4. In general avem :

$f(4k) = u(2^{4k}) = u((2^4)^k) = u(16^k) = 6$

$f(4k+1) = u(2^{4k+1}) = u((2^4)^k \cdot 2) = u(16^k \cdot 2) = 2$

$f(4k+2) = u(2^{4k+2}) = u((2^4)^k \cdot 4) = u(16^k \cdot 4) = 4$

$f(4k+3) = u(2^{4k+3}) = u((2^4)^k \cdot 8) = u(16^k \cdot 8) = 8$

Deci $f(n+4) = f(n)$, $\forall n \in N$ si $T_0 = 4$ (perioada principala)

Aplicatie

Fie functia $f: R \longrightarrow R$, $f(x)=(3m-2)x+5$, $m \in R$. Sa se determine $m \in R$ stiind ca $(1,6) \in G_f$.

Rezolvare

$$(1,6) \in G_f \Rightarrow f(1) = 6 \Rightarrow (3m-2)\cdot 1 + 5 = 6 \Rightarrow$$

x

y=f(x)

$$\Rightarrow 3m - 2 + 5 = 6 \Rightarrow 3m = 6 - 3 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 1$$

$$G_f = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

Aplicatie

$$\frac{29-2x}{3} + 7 < \frac{3x-11}{4} - x \quad \Big|\cdot 12 \Leftrightarrow 4(29-2x) + 7\cdot 12 < 3(3x-11) - 12x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 116 - 8x + 84 < 9x - 33 - 12x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 200 + 33 < 8x + 9x - 12x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 233 < 5x \quad \Big|:5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{233}{5} < x \Leftrightarrow x \in \left(\frac{233}{5}, +\infty\right)$$

Aplicatie

$$\frac{(x+4)(x+1)}{2x+3} > 0$$

x	$-\infty$	-4		$-3/2$		-1	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$		$-$	$-$		0	$+$ $+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	$-$		0	$+$ $+$
$2x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$R(x)$	$-$	0	$+$	|	$-$	0	$+$

$$\frac{(x+4)(x+1)}{2x+3} > 0 \iff$$

$$\iff x \in \left(-4, -\tfrac{3}{2}\right) \cup (-1, +\infty)$$

$$P(x) = (x+4)(x+1)$$

$$R(x) = \frac{P(x)}{2x+3} = \frac{(x+4)(x+1)}{2x+3}$$

$x+4=0 \iff x=-4$

$x+1=0 \iff x=-1$

$2x+3=0 \iff 2x=-3 \iff x=-\frac{3}{2}$

Aplicatie

Sa se rezolve inecuatia: $\frac{7-9y}{2} + 14 \le \frac{6y-10}{3} - 19y$

Rezolvare:

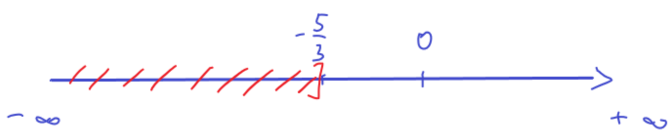
$$\frac{7-9y}{2} + 14 \le \frac{6y-10}{3} - 19y \;\Big|\cdot 6 \iff 3(7-9y) + 6\cdot 14 \le 2(6y-10) - 6\cdot 19y \iff$$

$$\iff 21 - 27y + 84 \le 12y - 20 - 114y \iff 114y - 12y - 27y \le -20 - 21 - 84 \iff$$

$$\iff 102y - 27y \le -41 - 84 \iff 75y \le -125 \;\Big|:25$$

$$\iff 3y \le -5 \;\Big|:3 \iff y \le -\frac{5}{3} \iff$$

$$\iff y \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right]$$



Aplicatie

Sa se rezolve inecuatia: $\dfrac{(-x-3)(x+5)}{x-2} < 0$.

Rezolvare:

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-3)$	-3	$(-3,2)$	2	$(2,+\infty)$
$-x-3$	+ + + +	+	+	0	− −	−	− −
$x+5$	− − −	0	+ +	+	+ +	+	+ +
$P(x)$	− − − −	0	+ +	0	− −	−	− −
$x-2$	− − − −	−	−	−	− −	0	+ + +
$R(x)$	+ + +	0	− −	0	+ +	|	− − −

$$\frac{(-x-3)(x+5)}{x-2} < 0 \iff$$

$$\iff R(x) < 0 \iff$$

$$\iff x \in (-5,-3) \cup (2,+\infty)$$

$P(x) = (-x-3)(x+5)$

$R(x) = \dfrac{P(x)}{x-2}$

$$\begin{cases} -x-3 = 0 \iff x = -3 \\ x+5 = 0 \iff x = -5 \\ x-2 = 0 \iff x = 2 \end{cases}$$

Aplicatie

Sa se rezolve inecuatia: $|6x-2| > 3x-5$.

Rezolvare:

$$|6x-2| = \begin{cases} +(6x-2), & 6x-2 \geq 0 \iff 6x \geq 2 \iff x \geq \frac{1}{3} \iff x \in [\frac{1}{3}, +\infty) \\ -(6x-2), & 6x-2 < 0 \iff 6x < 2 \iff x < \frac{1}{3} \iff x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \end{cases}$$

1) $x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \Rightarrow$ inecuatia devine $+(6x-2) > 3x-5 \iff 6x - 3x > 2 - 5 \iff$

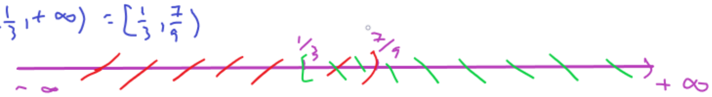
$\iff 3x > -3 \iff x > -1 \iff x \in (-1, +\infty)$

$S_1 = (-\infty, \frac{1}{3}) \cap (-1, +\infty) = (-1, \frac{1}{3})$

2) $x \in [\frac{1}{3}, +\infty) \Rightarrow$ inecuatia devine $-(6x-2) > 3x-5 \iff -6x+2 > 3x-5 \iff 2+5 > 6x+3x$

$\iff 7 > 9x \iff \frac{7}{9} > x \iff x \in (-\infty, \frac{7}{9})$

$S_2 = (-\infty, \frac{7}{9}) \cap [\frac{1}{3}, +\infty) = [\frac{1}{3}, \frac{7}{9})$



Final:

$\boxed{S = S_1 \cup S_2 = (-1, \frac{7}{9})}$

$\frac{7}{9} > \frac{1}{3} \iff \frac{7}{9} > \frac{3}{9}$ (A)

Aplicatie

Sa se rezolve inecuatia $\dfrac{2x-\sqrt{3}}{3-x} \geq 0$.

Rezolvare:

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		3	$+\infty$
$2x-\sqrt{3}$	$- - - -$	0	$+ +$	$+$	$+ +$
$3-x$	$+ + + +$	$+$	$+$	0	$- - -$
$\dfrac{2x-\sqrt{3}}{3-x}$	$- - -$	0	$+ +$	$\|$	$- - -$

$$\frac{2x-\sqrt{3}}{3-x} \geq 0 \iff x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right)$$

$$2x-\sqrt{3} = 0 \iff 2x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3-x = 0 \iff x = 3$$

Aplicatie

Fie functia $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = ax + 6$. Sa se determine $a \in R$ daca graficul functiei intersecteaza axa Ox in punctul $A(-2,0)$.

Rezolvare:

$$Ox \cap G_f = \{A(-2,0)\} \Rightarrow y = 0 \text{ și } x = -2 \Rightarrow f(-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot (-2) + 6 = 0 \iff -2a + 6 = 0 \mid :(-2)$$

$$\Rightarrow a - 3 = 0 \Rightarrow \underline{a = 3}$$

Aplicatie

Sa se alcatuiasca tabelul de monotonie si tabelul semnului pentru functia $f(x) = -3x + 9$, x R.

Rezolvare :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)=-3x+9$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

f strict descrescatoare

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)=-3x+9$	$+ + + + + +$	0	$- - - - - -$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -3x+9=0 \Leftrightarrow -x+3=0 \Leftrightarrow x=3$$

Aplicatie

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ -x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ -x+2(3-2x)=1 \end{cases} \Rightarrow -x+6-4x=1 \Leftrightarrow 5=5x \Leftrightarrow x=1$$

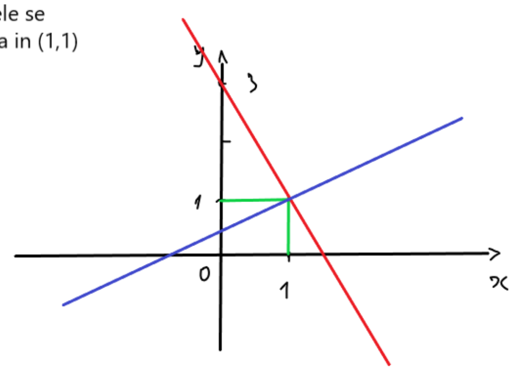
$$\begin{cases} x=1 \\ y=3-2\cdot 1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

adica dreptele se intersecteaza in (1,1)

Sa facem si grafic.

x	0	1
$y=3-2x$	3	1

x	0	1
$y=\frac{1+x}{2}$	$\frac{1}{2}$	1



Aplicatie

Sa se rezolve si sa se interpreteze geometric rezolvarea urmatorului sistem de ecuatii : $\begin{cases} x+10y=1 \\ x-5y=7 \end{cases}$

Rezolvare:

$\begin{cases} x+10y=1 \\ x-5y=7 \ \vert \cdot 2 \end{cases}$ (metoda reducerii) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+10y=1 \\ 2x-10y=14 \end{cases}$

$3x \quad / \quad = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5$

$\begin{cases} x=5 \\ 5-5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 5-7=5y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=5 \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow$ sistem compatibil determinat $\Rightarrow$ drepte intersectate in punctul P (5, -2/5)

x	0	1
$y=\frac{1-x}{10}$	$1/10$	0

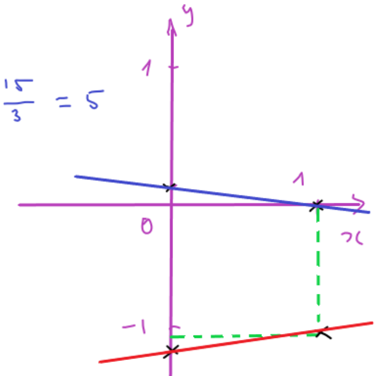
$x+10y=1 \Rightarrow y=\frac{1-x}{10}$

$x=0 \Rightarrow y=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}$

x	0	1
$y=\frac{x-7}{5}$	$-7/5$	$-6/5$

$x-5y=7 \Rightarrow y=\frac{7-x}{-5}=\frac{x-7}{5}$

$x=0 \Rightarrow y=\frac{0-7}{5}=-7/5$



daca se prelungesc dreptele acestea se vor intersecta in P (5, -2/5)

Aplicatie

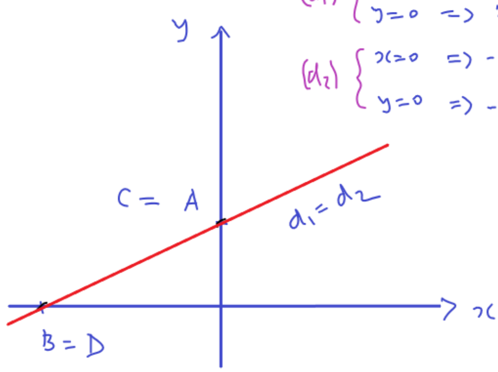
Sa se rezolve sistemul de ecuatii pe cale grafica si sa se verifice rezultatul gasit rezolvand pritr-o metoda algebrica :

$\begin{cases} 2x-3y+28=0 & (d_1) \\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-7=0 & (d_2) \end{cases}$

Rezolvare: Pentru a reprezenta dreptele aflam intersectia cu axele.

$(d_1) \begin{cases} x=0 \Rightarrow 2\cdot 0-3\cdot y+28=0 \Rightarrow 28=3y \Rightarrow y=\frac{28}{3} \Rightarrow A\left(0,\frac{28}{3}\right) \\ y=0 \Rightarrow 2x-3\cdot 0+28=0 \Rightarrow 2x=-28 \Rightarrow x=-14 \Rightarrow B(-14,0) \end{cases}$

$(d_2) \begin{cases} x=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{3}{4}y-7=0 \Rightarrow \frac{3}{4}y=7 \Rightarrow y=\frac{28}{3} \Rightarrow C\left(0,\frac{28}{3}\right) \\ y=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}\cdot 0-7=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x=7 \Rightarrow x=-14 \Rightarrow D(-14,0) \end{cases}$



$\begin{cases} 2x-3y+28=0 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-7=0 \ \vert \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+28=0 \\ -2x+3y-28=0 \ \vert \cdot(-1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+28=0 \\ 2x-3y+28=0 \end{cases}$ sistem compatibil nedeterminat

(drepte confundate)

$d_1 = d_2$

Aplicatie

Fie functiile f,g : R $\longrightarrow$ R, f(x) = 3x-2, g(x) = 2x-1.
a) Sa se reprezinte grafic in acelasi sistem de coordonate.
b) Sa se determine punctele comune ale graficelor.

Rezolvare:

a)

x	0	1
$f(x)=y=3x-2$	-2	1

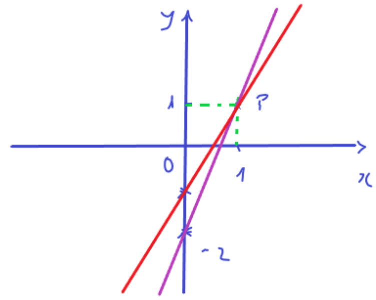
$x=0 \Rightarrow y=3\cdot 0-2=-2$

$x=1 \Rightarrow y=3\cdot 1-2=1$

x	0	1
$g(x)=y=2x-1$	-1	1

$x=0 \Rightarrow y=2\cdot 0-1=-1$

$x=1 \Rightarrow y=2\cdot 1-1=1$



b) $\begin{cases} y=3x-2 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow 3x-2=2x-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-2x=2-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1$

$y=2x-1=2\cdot 1-1=1$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow P(1,1)$

punctul de intersectie a dreptelor

Aplicatie

Sa se rezolve si sa se interpreteze geometric sistemul: $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases}$

Rezolvare

$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2x-y+3=0 \;|\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ -2x+y-3=0 \end{cases}$

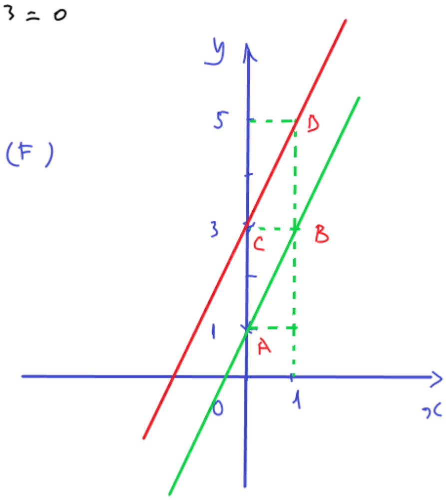
$1-3=0 \Leftrightarrow -2=0$ (F)

$\Rightarrow$ sistem incompatibil (nu are solutie)

$\Rightarrow$ drepte paralele

x	0 (A)	1 (B)
$y=2x+1$	1	3

x	0 (C)	1 (D)
$y=2x+3$	3	5



Aplicatie

Sa se rezolve si sa se interpreteze geometric sistemul: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$

Rezolvare

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \mid \cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

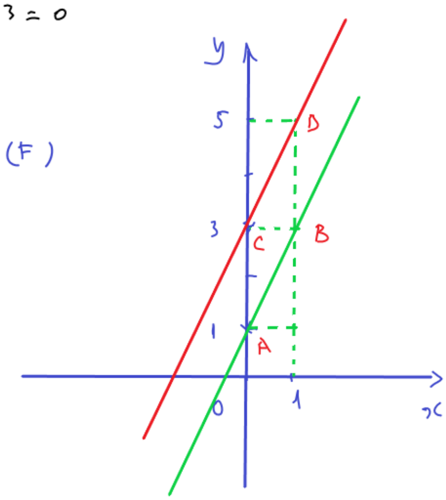
$$1 - 3 = 0 \Leftrightarrow -2 = 0 \ (F)$$

$\Rightarrow$ sistem incompatibil (nu are solutie)

$\Rightarrow$ drepte paralele

x	0 (A)	1 (B)
$y = 2x + 1$	1	3

x	0 (C)	1 (D)
$y = 2x + 3$	3	5



$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}+1)y = 6 \\ (\sqrt{2}+1)x - (1-\sqrt{2})y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\sqrt{2}x} - x + \cancel{\sqrt{2}y} + y = 6 \\ \cancel{\sqrt{2}x} + x + \cancel{\sqrt{2}y} - y = 2 \end{cases} \ (-)$$

$$-2x + 2y = 4 \mid :2 \Rightarrow -x + y = 2$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - \cancel{x} + \sqrt{2}y + \cancel{y} = 6 \\ \sqrt{2}x + \cancel{x} + \sqrt{2}y - \cancel{y} = 2 \end{cases} \ (+)$$

$$2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 8 \mid :2 \Rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 4$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cdot x + \sqrt{2}\cdot y = 4 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ \sqrt{2}\cdot x + \sqrt{2}(x+2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$\sqrt{2}x + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}x = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{2}} - 1 \Rightarrow x = \sqrt{2} - 1$

Aplicatie

Fie sistemul de ecuatii: $\begin{cases} 2x+4y=p \\ (m+2)x+5y=p+2 \end{cases}$, $m, p \in \mathbb{R}$

Sa se determine numerele m si p astfel incat sistemul sa fie:

a) compatibil determinat;

b) compatibil nedeterminat;

c) incompatibil.

Rezolvare:

$$\begin{cases} 2x+4y=p \\ mx+\boxed{2x+4y}+y=p+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+4y=p \\ mx+\cancel{p}+y=\cancel{p}+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+4y=p \\ mx+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-mx \\ 2x+4(2-mx)=p \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2-mx \\ 2x+8-4mx=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-mx \\ x(2-4m)=p-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2-mx \\ x=\frac{p-8}{2-4m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{p-8}{2-4m} \\ y=2-m\cdot\frac{p-8}{2-4m} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{p-8}{2-4m} \\ y=\frac{4-\cancel{8m}-mp+\cancel{8m}}{2-4m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{p-8}{2-4m} \\ y=\frac{4-mp}{2-4m} \end{cases}$$

Dacă $m=\frac{1}{2}$ atunci $2-4m=0$, sistem incompatibil

$$\begin{cases} 2x+4y=p \\ \frac{5}{2}x+5y=p+2 \;\big|\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=p \\ 5x+10y=2p+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=\frac{p}{2} \\ x+2y=\frac{2p+2}{5} \end{cases}$$

drepte paralele

Sistemul $\begin{cases} 2x+4y=p \\ (m+2)x+5y=p+2 \end{cases}$ reprezinta aceeasi dreapta (sistem compatibil nedeterminat) daca coeficientii sunt proportionali, adica $\frac{2}{m+2}=\frac{4}{5}=\frac{p}{p+2}$.

$$\begin{cases} \frac{2}{m+2}=\frac{4}{5} \Rightarrow 10=4m+8 \Rightarrow 2=4m \Rightarrow m=\frac{1}{2} \\ \frac{p}{p+2}=\frac{4}{5} \Rightarrow 5p=4p+8 \Rightarrow p=8 \end{cases}$$

Dar m nu poate lua valoarea 1/2 pentru ca ar fi sistem incompatibil. Deci nu putem avea pentru acest sistem situatia compatibil nedeterminat (drepte confundate).

Mai ramane situatia sistem compatibil determinat (drepte intersectate) pentru $m \neq \frac{1}{2}$, $p \in \mathbb{R}$.

Aplicatie

Sa se rezolve si sa se interpreteze geometric : $\begin{cases} 7x + 10y = 3 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} 7x + 10y = 3 \\ 2x - 5y = 7 \mid \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 10y = 3 \\ 4x - 10y = 14 \end{cases}$$

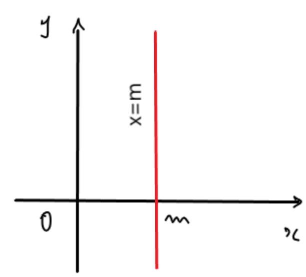
$$11x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{11}$$

$$2x - 5y = 7 \Rightarrow 2 \cdot \frac{17}{11} - 5y = 7 \mid \cdot 11 \Leftrightarrow 34 - 55y = 77 \Leftrightarrow 34 - 77 = 55y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -43 = 55y \Leftrightarrow y = -\frac{43}{55}$$

Dreptele se intersecteaza in punctul M $\left(\frac{17}{11}, -\frac{43}{55}\right)$

Drepte de forma x=m si y=m



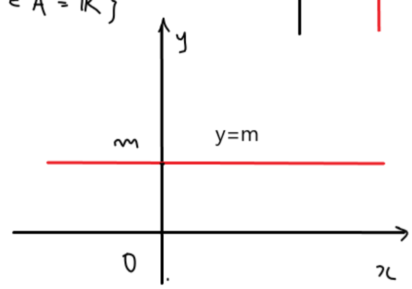
Fie $A=\{m\}, m \in R$ si B=R. Produsul cartezian A x B= $\{(m, b) \mid b \in B = \mathbb{R}\}$

Reprezentarea geometrica a produsului cartezian este dreapta de forma x=m.

(dreapta cu rosu paralela cu Oy)

Fie A=R si B= $\{m\}$, $m \in R$. Produsul cartezian A x B= $\{(a, m) \mid a \in A = \mathbb{R}\}$

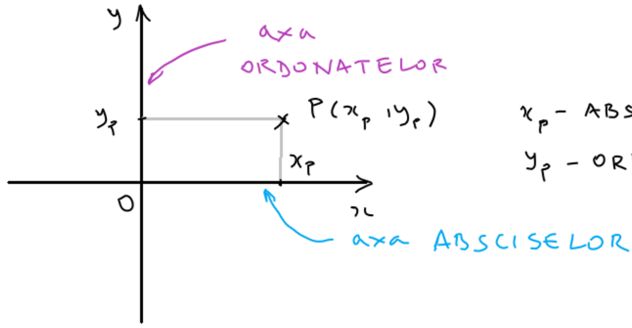
Reprezentarea geometrica a produsului cartezian este dreapta de forma y=m. (dreapta cu rosu paralela cu Ox)



3) Se considera f(x)=2x+3, x nr. real.

a) Reprezentati grafic functia f.

b) Determinati abscisa punctului de pe grafic care are ordonata egala cu abscisa.



x_P - ABSCISA lui P

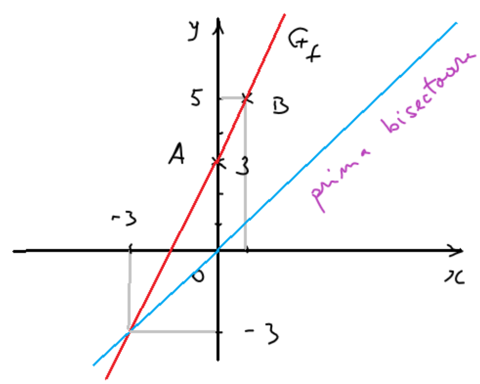
y_P - ORDONATA lui P

a)

	A	B
x	0	1
$y = f(x)$	3	5

$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$

$f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$



b) $\begin{cases} P(x, y) \in G_f \\ y = x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ y = x \end{cases} \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow$

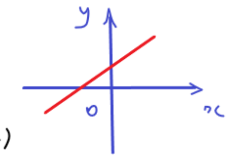
$\Rightarrow 2x + 3 = x \Rightarrow 2x - x = -3 \Rightarrow \boxed{x = -3}$

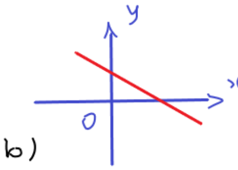
Monotonia functiei de gradul I

Functia de gradul I $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, este strict monotona daca

a) $a > 0$ atunci f strict crescatoare

b) $a < 0$ atunci f strict descrescatoare.

a) 

b) 

Semnul functiei de gradul I

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		semn opus semnului lui a	0	semnul lui a	

Aplicatie

Sa se studieze paritatea functiilor

1) $f(x) = x^{2n}$, $x \in R$, $n \in N$

2) $f(x) = 2$, $x \in (-1, 1)$

3) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in (-2, 2)$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in R \setminus \{0\}$

5) $f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$, $x \in R \setminus \{-1, 1\}$

Rezolvare

1) $f(-x) = (-x)^{2n} = [(-x)^2]^n = (x^2)^n = x^{2n} = f(x)$, pară

2) $f(-x) = 2 = f(x)$, pară

3) $f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$, pară

4) $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$, impară

5) $f(-x) = \frac{-x}{1 - |-x|} = \frac{-x}{1 - |x|} = -\frac{x}{1 - |x|} = -f(x)$, impară

Pozitia relativa a doua drepte

Sisteme de ecuatii de forma ax+by=c, mx+ny=p, a,b,c,m,n,p∈ R .

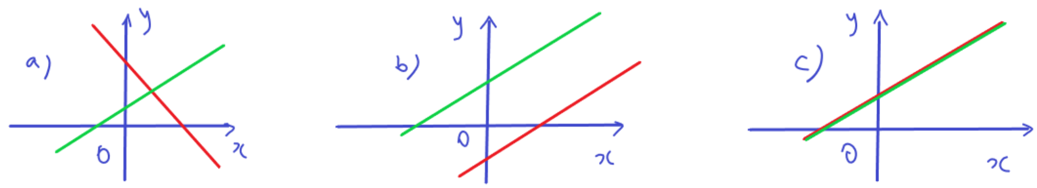
$$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases} \quad a,b,c,m,n,p \in R \; , \; a,b,m,n$$ – coeficientii necunoscutelor x si y

c, p – termenii liberi

Ecuatia ax+by=c poate fi adusa la forma y=αx+ β , adica ecuatia unei drepte.
La fel ecuatia mx+ny=p reprezinta ecuatia unei drepte.

In consecinta prin rezolvarea sistemului de ecuatii putem afla pozitia relativa a dreptelor reprezentate prin acele ecuatii.
Si anume: a) daca sistemul are solutie unica atunci dreptele corespunzatoare se intersecteaza.

b) daca sistemul nu are solutie atunci dreptele sunt paralele.
c) daca sistemul are o infinitate de solutii (compatibil nedeterminat) atunci dreptele sunt confundate.



$$\begin{cases} x-3y=14 \\ 3x+4y=3 \end{cases}$$ prin SUBSTITUTIE

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=14+3y \\ 3(14+3y)+4y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14+3y \\ 42+9y+4y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=14+3y \\ 42-3=-13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14+3y \\ 39=-13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14+3(-3) \\ y=39:(-13)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y=14 \\ 3x+4y=3 \end{cases}$$ prin REDUCERE

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=14 \;\; |\cdot(-3) \\ 3x+4y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+9y=-42 \\ 3x+4y=3 \end{cases}$$

$$/ \quad 13y=-39 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=(-39):13=-3 \Leftrightarrow \boxed{y=-3}$$

$$x-3y=14 \Leftrightarrow x-3(-3)=14 \Leftrightarrow x+9=14 \Leftrightarrow \boxed{x=5}$$

$$\begin{cases} 6x-5y=22 \\ 3x+y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-5(25-3x)=22 \\ y=25-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-125+15x=22 \\ y=25-3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x=22+125 \\ y=25-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x=147 \\ y=25-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=147:21=7 \\ y=25-3\cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+11y=2 \\ x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(2-2y)+11y=2 \\ x=2-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-8y+11y=2 \\ x=2-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=2-8 \\ x=2-2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y=-6 \\ x=2-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=2-2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=6 \end{cases}$$