

Aplicatie

Sa se determine ratia si suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $a_1 = -10$, $a_n = -20$, $n = 6$.

Rezolvare

$$S_6 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{-10 - 20}{2} \cdot 6 = \frac{-30}{2} \cdot 6 = -15 \cdot 6 = -90$$

$$n = 6 \Rightarrow a_n = a_6 = a_1 + (6-1) \cdot r \Rightarrow -20 = -10 + 5 \cdot r \Rightarrow -10 = 5 \cdot r \Rightarrow r = -2$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Aplicatie

$$b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_1 \cdot q^2, b_4 = b_1 \cdot q^3$$

$$\begin{cases} b_2(b_3 - b_1) = 24 \\ b_3(b_4 - b_2) = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = ? \\ q = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q (b_1 \cdot q^2 - b_1) = 24 \\ b_1 \cdot q^2 (b_1 \cdot q^3 - b_1 \cdot q) = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1^2 \cdot q \cdot (q^2 - 1) = 24 \\ b_1^2 \cdot q^3 \cdot (q^2 - 1) = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1^2 \cdot q \cdot (q^2 - 1) = 24 \\ b_1^2 \cdot q \cdot (q^2 - 1) \cdot q^2 = 96 \end{cases}$$

$$24 \cdot q^2 = 96 \quad | :24$$

$$q^2 = 4$$

$$q = \pm 2$$

$$\begin{cases} q = 2 \\ b_1^2 \cdot 2 \cdot (2^2 - 1) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ b_1^2 = 4 \Rightarrow b_1 = \pm 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -2 \\ b_1^2 \cdot (-2) \cdot ((-2)^2 - 1) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2 \\ b_1^2 = -4, \text{ imposibil} \end{cases}$$

$$\text{solutia: } \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = \pm 2 \end{cases}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Aplicatie

Sa se rezolve ecuatia $1 + 4 + 7 + \dots + x = 117$

Rezolvare:

Observam ca termenii sunt in progresie aritmetica $a_1 = 1, r = 3$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$\begin{cases} S_n = \frac{1+x}{2} \cdot n = 117 \\ x = 1 + (n-1) \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(1+x) = 234 \\ x = 1 + 3n - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(1+3n-2) = 234 \\ x = 3n-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 \\ x = 3 \cdot 9 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 \\ x = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n(1+3n-2) = 234 \\ n(3n-1) = 234 \\ 3n^2 - n - 234 = 0 \end{cases} \begin{cases} \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-234) \\ \Delta = 1 + 2808 \\ \Delta = 2809 = 53^2 \end{cases} \begin{cases} n_1 = \frac{1+53}{6} = \frac{54}{6} = 9 \\ n_2 = \frac{1-53}{6} = \frac{-52}{6} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Aplicatie

Sa se determine x numar real astfel incat tripletul sa fie format din numere in progresie geometrica

$3x-1, x+3, 9-x$

Rezolvare: $\dots b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots$ $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

$$x+3 = \sqrt{(3x-1)(9-x)} \Rightarrow (x+3)^2 = (3x-1)(9-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 27x - 3x^2 - 9 + x \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 27x + 3x^2 + 9 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 22x + 18 = 0 \quad | :2 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 9 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 9x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1) - 9(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-9) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ sau } 2x-9=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=1} \text{ sau } \boxed{x=\frac{9}{2}}$$

Aplicatie

Sa se rezolve ecuatia $(3x-1) + (3x-4) + (3x-7) + \dots + (3x-58) = 790$

Rezolvare:

Observam ca se aduna termenii unei progresii aritmetice de ratie -3.

$$\begin{cases} S_n = 790 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3x-1) + (3x-58)}{2} \cdot n = 790 \\ 3x-58 = 3x-1 + (n-1)(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6x-59}{2} \cdot n = 790 \\ -58 = -1 - 3(n-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (6x-59) \cdot n = 1580 \\ 3(n-1) = 57 \quad | :3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6x-59) \cdot n = 1580 \\ n-1 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6x-59) \cdot 20 = 1580 \quad | :20 \\ n = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-59 = 79 \\ n = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 138 \\ n = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = 23} \\ \boxed{n = 20} \end{cases}$$

Aplicatie

Sa se determine primul termen si ratiia progresiei geometrice

$$\begin{cases} b_5 - b_1 = 30 \\ b_4 - b_2 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^{5-1} - b_1 = 30 \\ b_1 \cdot q^{4-1} - b_1 \cdot q^{2-1} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q^4 - b_1 = 30 \\ b_1 q^3 - b_1 q = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 (q^4 - 1) = 30 \\ b_1 q (q^2 - 1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{30}{q^4 - 1} \\ \frac{30}{q^4 - 1} \cdot q (q^2 - 1) = 12 \end{cases}$$

$$\frac{30}{(q^2-1)(q^2+1)} \cdot q \cdot (q^2-1) = 12 \Leftrightarrow \frac{30 \cdot q}{q^2+1} = 12 \quad | :6 \Leftrightarrow \frac{5q}{q^2+1} = 2 \Leftrightarrow 5q = 2q^2 + 2$$

$$b_m = b_1 \cdot q^{m-1} \quad \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$q_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$q_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Dacă $q = 2$ atunci $b_1 = \frac{30}{2^4 - 1} = \frac{30}{16 - 1} = \frac{30}{15} = 2$.

Dacă $q = \frac{1}{2}$ atunci $b_1 = \frac{30}{\frac{1}{16} - 1} = \frac{30}{\frac{1-16}{16}} = \frac{16 \cdot 30}{-15} = 16 \cdot (-2) = -32$

Aplicatie

Sa se determine primul termen ratiia progresiei geometrice

$$\begin{cases} b_2 + b_5 - b_4 = 10 \\ b_3 + b_6 - b_5 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^{2-1} + b_1 \cdot q^{5-1} - b_1 \cdot q^{4-1} = 10 \\ b_1 \cdot q^{3-1} + b_1 \cdot q^{6-1} - b_1 \cdot q^{5-1} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (q + q^4 - q^3) = 10 \\ b_1 \cdot (q^2 + q^5 - q^4) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (q + q^4 - q^3) = 10 \\ q \cdot b_1 (q + q^4 - q^3) = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot (q + q^4 - q^3) = 10 \\ q \cdot 10 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (2 + 2^4 - 2^3) = 10 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (2 + 16 - 8) = 10 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot 10 = 10 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot 10 = 10 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

Aplicatie

Sa se determine suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $b_1 = 2,5$, $q = 1,5$, $n = 5$.

$$S_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = b_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

$$S_5 = 2,5 \cdot \frac{1,5^5 - 1}{1,5 - 1} = 2,5 \cdot \frac{7,59375 - 1}{0,5} = 2,5 \cdot 13,1875 = 32,96875$$

Aplicatie

Sa se determine primii doi termeni ai progresiei geometrice $b_8 = 256$, $q = 4$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow b_8 = b_1 \cdot q^{8-1} \Rightarrow 256 = b_1 \cdot 4^7 \Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{256}{4^7} = \frac{4^4}{4^7} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}}$$

$$\boxed{b_2 = b_1 \cdot q = \frac{1}{64} \cdot 4 = \frac{1}{16}}$$

$$\begin{array}{l} 256 \\ 64 \\ 16 \\ 4 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{array} \right.$$

Aplicatii

1) Sa se determine termenul de rang n al progresiei geometrice

$$\begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ || & || & || \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \dots \end{array}$$

2) Sa se determine termenul de rang n al progresiei geometrice

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{6} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \dots \\ || & || & \\ b_1 & b_2 & \end{array}$$

$$1) b_2 = b_1 \cdot q \Leftrightarrow \frac{1}{3} = (-1) \cdot q \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{3} \text{ sau } -\frac{1}{3}}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow b_n = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$2) b_2 = b_1 \cdot q \Leftrightarrow \sqrt{3} = \sqrt{6} \cdot q \Leftrightarrow \boxed{q = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$b_n = b_1 \cdot q \Leftrightarrow b_n = \sqrt{6} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$