

Progresii aritmetice

Siruri

Numim sir o aplicatie (functie) definita pe multimea numerelor naturale cu valori in multimea numerelor reale ce asociaza fiecarui numar real un numar natural.

Ex.

2, 4, 6, 8, ... , 2n, ... (sirul numerelor pare)
↑ ↑ ↑ ↑ ↑
1 2 3 4 ... n

Elementele unui sir se numesc termeni.

Numerele naturale asociate stabilesc o ordine intre termenii sirului indicand al catalea termen in sir este un anumit numar real.

Ex.

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... , $\frac{1}{n}$
↑ ↑ ↑ ↑ ↑
1 2 3 4 5 ... n

Ex. La primul sir numarul 8 este al 4-lea termen.

Progresii aritmetice

Numim progresie aritmetica un sir de numere reale in care fiecare termen, mai putin primul, se obtine din precedentul la care se aduna un numar fixat numit ratia progresiei.

Ex. 0, 1, 2, 3, ... , n, ... este progresie aritmetica cu primul termen 0 si ratie 1 (sirul numerelor naturale)

Ex. 1, 5, 9, 13, ... , n+4, ... este progresie aritmetica cu primul termen 1 si ratie 4

Notatie: O progresie aritmetica se noteaza ca un sir la care se precizeaza ca este progresie aritmetica sau cu un semn special ↕

Ex. ↕ 2, 7, 12, ... intelegem ca este progresie aritmetica cu primul termen 2 si ratie 5

Notatie: termenii unei progresii aritmetice se noteaza cu a_n , iar intreaga progresie aritmetica (sir) se noteaza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$

Aplicatie

Sa se determine termenii de rang 10, 15, 20 ai progresiei aritmetice $-4, -1, 2, 5, \dots$

$$a_1 = -4, \quad r = 3$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot r = -4 + 9 \cdot 3 = -4 + 27 = 23$$

$$a_{15} = a_1 + (15-1) \cdot r = -4 + 14 \cdot 3 = -4 + 42 = 38$$

$$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot r = -4 + 19 \cdot 3 = -4 + 57 = 53$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + r \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \end{cases}$$

Tema

Din manual, pag.79, E1

Aplicatie

Sa se determine termenii x, y, z, t ai progresiei aritmetice: $x, y, -21, z, -15, t, \dots$

$$z = \frac{-21 + (-15)}{2} = \frac{-36}{2} = -18 \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

$$t = -15 + 3 = -12$$

$$y = -24$$

$$x = -27$$

$$a_m = \frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}$$

Aplicatie

Sa se determine termenul a_{10} al progresiei aritmetice $a_1 = -2, a_5 = 12$.

$$a_5 = a_1 + (5-1) \cdot r$$

$$12 = -2 + 4 \cdot r$$

$$14 = 4r$$

$$7 = 2r$$

$$\frac{7}{2} = r$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot r$$

$$a_{10} = -2 + 9 \cdot \frac{7}{2}$$

$$a_{10} = \frac{-4}{2} + \frac{63}{2}$$

$$a_{10} = \frac{59}{2}$$

Tema

Sa se determine termenul a_{10}
al progresiei aritmetice

$$a_2 = 48, a_{24} = -150.$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Aplicatie

Sa se determine suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice daca $a_1 = -1, r = 3, n = 12$.

$$S_{12} = \frac{-1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{-1 + 32}{2} \cdot 12 = (-1 + 32) \cdot 6 = 31 \cdot 6 = 186$$

$$a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot r = -1 + 11 \cdot 3 = -1 + 33 = 32$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Tema

Sa se determine suma
primilor n termeni ai
progresiei aritmetice

$$a_1 = 100, r = 2, m = 60$$

Aplicatie

Sa se determine ratia si suma primilor termeni ai progresiei aritmetice $a_1 = 5, a_{26} = 105, n = 26$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{26} = \frac{5 + 105}{2} \cdot 26 = 120 \cdot 13 = 1560$$

$$a_{26} = a_1 + (26-1) \cdot r$$

$$105 = 5 + 25 \cdot r$$

$$100 = 25 \cdot r$$

$$r = 4$$

Tema

Sa se determine ratia si suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice

$$a_1 = -10, a_n = -20, n = 6$$

Aplicatie

Sa se determine primul termen si ratia progresiei aritmetice daca $a_3 = -4, S_{15} = -285$.

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + (3-1) \cdot r \\ S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = a_1 + 2 \cdot r \\ -285 = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2 \cdot r = -4 \\ \frac{a_1 + a_1 + 14r}{2} \cdot 15 = -285 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{15} = a_1 + (15-1) \cdot r \\ a_{15} = a_1 + 14 \cdot r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2 \cdot r = -4 \\ (a_1 + 7r) \cdot 3 = -57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2 \cdot r = -4 \\ a_1 + 7r = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4 - 2r \\ -4 - 2r + 7r = -19 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$-4 + 5r = -19 \Leftrightarrow r = -\frac{15}{5} \Rightarrow r = -3$$

$$a_1 = -4 - 2(-3) = -4 + 6 \Leftrightarrow a_1 = 2$$