

## Sapt. 10 (16-20 nov)

### Progresii aritmetice

#### Siruri

Numim sir o aplicatie ( functie ) definita pe multimea numerelor naturale cu valori in multimea numerelor reale ce asociaza fiecarui numar real un numar natural.

Ex.

2, 4, 6, 8, ... , 2n, ... ( sirul numerelor pare )  
↑ ↑ ↑ ↑ ↑  
1 2 3 4 ... n

Elementele unui sir se numesc termeni.

Numerele naturale asociate stabilesc o ordine intre termenii sirului indicand al catalea termen in sir este un anumit numar real.

Ex.

1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ , ... ,  $\frac{1}{n}$   
↑ ↑ ↑ ↑ ↑  
1 2 3 4 5 ... n

Ex. La primul sir numarul 8 este al 4-lea termen.

### Progresii aritmetice

Numim progresie aritmetica un sir de numere reale in care fiecare termen, mai putin primul, se obtine din precedentul la care se aduna un numar fixat numit ratia progresiei.

Ex. 0, 1, 2, 3, ... , n, ... este progresie aritmetica cu primul termen 0 si ratie 1 ( sirul numerelor naturale )

Ex. 1, 5, 9, 13, ... , n+4, ... este progresie aritmetica cu primul termen 1 si ratie 4

Notatie: O progresie aritmetica se noteaza ca un sir la care se precizeaza ca este progresie aritmetica sau cu un semn special ↕

Ex. ↕ 2, 7, 12, ... intelegem ca este progresie aritmetica cu primul termen 2 si ratie 5

Notatie: termenii unei progresii aritmetice se noteaza cu  $a_n$ , iar intreaga progresie aritmetica (sir) se noteaza  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$

Aplicatie

Sa se determine termenii de rang 10, 15, 20 ai progresiei aritmetice  $-4, -1, 2, 5, \dots$

$$a_1 = -4, \quad r = 3$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot r = -4 + 9 \cdot 3 = -4 + 27 = 23$$

$$a_{15} = a_1 + (15-1) \cdot r = -4 + 14 \cdot 3 = -4 + 42 = 38$$

$$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot r = -4 + 19 \cdot 3 = -4 + 57 = 53$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + r \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \end{cases}$$

Tema

Din manual, pag.79, E1

Aplicatie

Sa se determine termenii  $x, y, z, t$  ai progresiei aritmetice:  $x, y, -21, z, -15, t, \dots$

$$z = \frac{-21 + (-15)}{2} = \frac{-36}{2} = -18 \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

$$t = -15 + 3 = -12$$

$$y = -24$$

$$x = -27$$

$$a_m = \frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}$$

Aplicatie

Sa se determine termenul  $a_{10}$  al progresiei aritmetice  $a_1 = -2, a_5 = 12$ .

$$a_5 = a_1 + (5-1) \cdot r$$

$$12 = -2 + 4 \cdot r$$

$$14 = 4r$$

$$7 = 2r$$

$$\frac{7}{2} = r$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot r$$

$$a_{10} = -2 + 9 \cdot \frac{7}{2}$$

$$a_{10} = \frac{-4}{2} + \frac{63}{2}$$

$$a_{10} = \frac{59}{2}$$

Tema

Sa se determine termenul  $a_{10}$  al progresiei aritmetice

$$a_2 = 48, a_{24} = -150.$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Aplicatie

Sa se determine suma primilor  $n$  termeni ai progresiei aritmetice daca  $a_1 = -1, r = 3, n = 12$ .

$$S_{12} = \frac{-1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{-1 + 32}{2} \cdot 12 = (-1 + 32) \cdot 6 = 31 \cdot 6 = 186$$

$$a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot r = -1 + 11 \cdot 3 = -1 + 33 = 32$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Tema

Sa se determine suma primilor  $n$  termeni ai progresiei aritmetice

$$a_1 = 100, r = 2, m = 60$$

Aplicatie

Sa se determine ratia si suma primilor termeni ai progresiei aritmetice  $a_1 = 5, a_{26} = 105, n = 26$ .

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{26} = \frac{5 + 105}{2} \cdot 26 = 120 \cdot 13 = 1560$$

$$a_{26} = a_1 + (26-1) \cdot r$$

$$105 = 5 + 25 \cdot r$$

$$100 = 25 \cdot r$$

$$r = 4$$

Tema

Sa se determine ratia si suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice

$$a_1 = -10, a_n = -20, n = 6$$

Aplicatie

Sa se determine primul termen si ratia progresiei aritmetice daca  $a_3 = -4, S_{15} = -285$ .

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + (3-1) \cdot r \\ S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = a_1 + 2 \cdot r \\ -285 = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2 \cdot r = -4 \\ \frac{a_1 + a_1 + 14r}{2} \cdot 15 = -285 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{15} = a_1 + (15-1) \cdot r \\ a_{15} = a_1 + 14 \cdot r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2 \cdot r = -4 \\ (a_1 + 7r) \cdot 3 = -57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2 \cdot r = -4 \\ a_1 + 7r = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4 - 2r \\ -4 - 2r + 7r = -19 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$-4 + 5r = -19 \Leftrightarrow r = -\frac{15}{5} \Rightarrow r = -3$$

$$a_1 = -4 - 2(-3) = -4 + 6 \Leftrightarrow a_1 = 2$$

Sapt. 11 (23-27 nov)

Aplicatie

$$\begin{cases} a_4 + a_8 = 30 \\ 10 \cdot a_1 - 4 \cdot a_2 = -45 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = ? \\ n = ? \end{cases}$$

$$a_4 = a_1 + (4-1)n = a_1 + 3n$$

$$a_8 = a_1 + (8-1)n = a_1 + 7n$$

$$a_7 = a_1 + (7-1)n = a_1 + 6n$$

$$\begin{cases} a_1 + 3n + a_1 + 7n = 30 \\ 10 \cdot a_1 - 4(a_1 + 6n) = -45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 10n = 30 \\ 10 \cdot a_1 - 4 \cdot a_1 - 24n = -45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 10n = 30 \quad | :2 \\ 6a_1 - 24n = -45 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} a_1 + 5n = 15 \\ 6a_1 - 24n = -45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 - 5n \\ 6(15 - 5n) - 24n = -45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 - 5n \\ 90 - 30n - 24n = -45 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 - 5n \\ 135 = 54n \quad | :3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 - 5n \\ 45 = 18n \quad | :3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 - 5n \\ 15 = 6n \quad | :3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 - 5n \\ 5 = 2n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 - 5 \cdot \frac{5}{2} \\ n = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{30 - 25}{2} \\ n = 5/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{5}{2} \\ n = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Aplicatie

$$\begin{cases} a_2 + a_5 + a_9 = 45 \\ a_3 + a_7 + a_{10} = 54 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = ? \\ n = ? \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 + n, \quad a_3 = a_1 + 2n$$

$$a_5 = a_1 + 4n, \quad a_7 = a_1 + 6n$$

$$a_9 = a_1 + 8n, \quad a_{10} = a_1 + 9n$$

$$\begin{cases} a_1 + n + a_1 + 4n + a_1 + 8n = 45 \\ a_1 + 2n + a_1 + 6n + a_1 + 9n = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 + 13n = 45 \\ 3a_1 + 17n = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 = 45 - 13n \\ 45 - 13n + 17n = 54 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 = 45 - 13n \\ 3n = 54 - 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 = 45 - 13n \\ 3n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 = 45 - 12 \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 = 3 \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Aplicatie

Sa se determine primul termen si ratia unei progresii aritmetice daca

$$\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_6 = 51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3 = 12 \\ \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + a_3) \cdot 3 = 24 \quad | :3 \\ (a_1 + a_6) \cdot 6 = 102 \quad | :6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 = 8 \\ a_1 + a_6 = 17 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 2n = 8 \\ a_1 + a_1 + 5n = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 2n = 8 \\ 2a_1 + 5n = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 8 - 2n \quad | :2 \\ 8 - 2n + 5n = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - n \\ 3n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot n$$

Aplicatie

Sa se determine  $x$  numar real astfel incat tripletul de numere  $x-4, x+2, 2x+2$  sa fie in progresie aritmetica.

$$x+2 = \frac{(x-4) + (2x+2)}{2} \Leftrightarrow x+4 = \frac{3x-2}{2} \Leftrightarrow 2x+8 = 3x-2 \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow 8+2 = 3x-2x \Leftrightarrow 10 = x$$

$$a_m = \frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}$$

Aplicatie

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \end{cases}$$

$$\div \begin{cases} S_2 - S_4 + a_2 = 14 \\ S_3 + a_3 = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = ? \\ n = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot 2 + a_2 = 14 \\ \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot 3 + a_3 = 17 \end{cases} \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 - 2(a_1 + a_2) + a_2 = 14 \\ 3(a_1 + a_2) + 2a_3 = 34 \end{cases} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + n - 2a_1 - 2(a_1 + 3n) + a_1 + n = 14 \\ 3a_1 + 3(a_1 + 2n) + 2(a_1 + 2n) = 34 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 - 4n = 14 \\ 8a_1 + 10n = 34 \end{cases} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -14 - 4n \\ -112 - 22n + 10n = 34 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -14 - 4n \\ -22n = 146 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -14 - 4n \\ n = \frac{146}{-22} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -14 - 4 \cdot \frac{73}{-11} \\ n = \frac{73}{-11} \end{cases} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -14 + \frac{292}{11} \\ n = -\frac{73}{11} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{-154 + 292}{11} \\ n = -\frac{73}{11} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{138}{11} \\ n = -\frac{73}{11} \end{cases}$$

## Progresii geometrice

Numim progresie geometrica un sir de numere cu primul termen nenul, iar termenii urmatiori se obtin din termenul precedent inmultit cu un numar fixat nenul numit ratia progresiei.

Ex.  $\div \div 1, 2, 4, 8, 16, \dots$   $b_1 = 1, q = 2$  (ratia)

Pentru a arata ca este vorba de o progresie geometrica se pune in fata sirului semnul  $\div \div$

De obicei termenii unei progresii geometrice se vor scrie  $b_n, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

## Proprietati ale progresiei geometrice

$$1) \quad b_n = b_{n-1} \cdot q, \quad q \neq 0$$

$$2) \quad b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \quad (\text{orice termen dupa primul este media geometrica a termenilor alaturati; de aici vine si denumirea de progresie geometrica})$$

$$3) \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad n > 1 \quad (\text{formula termenului general})$$

$$4) \quad S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Aplicatii

Sa se determine termenul de rang  $n$  al progresiei geometrice

$b_1$   $b_2$   $b_3$   
↓ ↓ ↓  
6, 18, 54, ...

$$18 = 6 \cdot 3$$
$$54 = 18 \cdot 3 \quad \Rightarrow r = 3$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = 6 \cdot 3^{n-1} \quad \text{termenul general}$$

Aplicatie

Sa se determine primii doi termeni ai progresiei geometrice

$$b_8 = 256, \quad q = 4$$

$$\div b_1, b_2, \dots, b_8, \dots$$

$\parallel$   
256

$$\begin{array}{r|l} 256 & 4 \\ 64 & 4 \\ 16 & 4 \\ 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{array}$$

$$b_8 = b_1 \cdot q^{8-1} \Leftrightarrow 256 = b_1 \cdot 4^7 \Leftrightarrow 4 = b_1 \cdot 4^7 \Leftrightarrow b_1 = 4 : 4^7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_1 = 4^{4-7} \Leftrightarrow b_1 = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$b_2 = b_1 \cdot q = \frac{1}{64} \cdot 4 = \frac{1}{16}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Aplicatie

Sa se determine suma primilor  $n$  termeni ai progresiei geometrice  $b_1 = 3, q = 2, n = 6$ .

$$S_6 = b_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{64 - 1}{1} =$$
$$= 3 \cdot 63 = 189$$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Aplicatie

Sa se determine suma primilor  $n$  termeni ai progresiei geometrice  $-9, -3, 1, \dots, n = 7$ .

$$b_1 = -9$$

$$b_2 = b_1 \cdot q \Leftrightarrow -3 = -9 \cdot q \Leftrightarrow q = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

$$S_7 = b_1 \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1} = -9 \cdot \frac{(\frac{1}{3})^7 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = -9 \cdot \frac{\frac{1}{3^7} - 1}{\frac{1-3}{3}} = -9 \cdot \frac{\frac{1-3^7}{3^7}}{\frac{1-3}{3}} = -9 \cdot \frac{1-3^7}{3^7} \cdot \frac{3}{1-3} =$$
$$= -9 \cdot \frac{1-2187}{2187} \cdot \frac{3}{-2} = -9 \cdot \frac{1098}{2187} \cdot \frac{3}{2} = -9 \cdot \frac{1098}{729} = -\frac{129}{81} = -\frac{43}{27}$$
$$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \cdot 27 \cdot 3 = 27 \cdot 81 = 2187$$

### Aplicatie

Sa se decida daca este progresie geometrica un sir cu termenul general

$$b_n = \frac{2^n}{3^n}$$

Rezolvare: Un sir este progresie geometrica daca orice termen dupa primul este medie geometrica a termenilor alaturati

In cazul nostru de verificat  $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} &= \sqrt{\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}} = \sqrt{\frac{2^{\cancel{n-1}+n+1}}{3^{\cancel{n-1}+n+1}}} = \sqrt{\frac{2^{2n}}{3^{2n}}} = \sqrt{\left(\frac{2^n}{3^n}\right)^2} = \\ &= \frac{2^n}{3^n} = b_n \quad \text{c.c.t.d.}\end{aligned}$$

### Aplicatie

Sa se determine o progresie geometrica stiind ca suma primilor trei termeni este 21, iar suma urmatoilor trei termeni este 168.

Rezolvare:

$$\therefore \underbrace{b_1, b_2, b_3}_{21}, \underbrace{b_4, b_5, b_6}_{168}, \dots$$

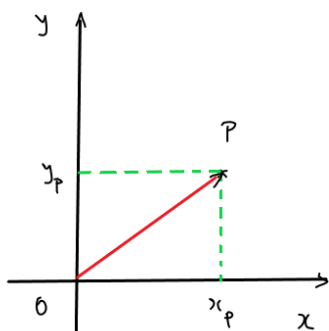
$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21 \\ b_4 + b_5 + b_6 = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 21 \\ b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^5 = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 21 \\ b_1 \cdot q^3(1 + q + q^2) = 168 \end{cases} =$$

$$\Rightarrow 21 \cdot q^3 = 168 \quad | : 7 | : 3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$\underbrace{21 \cdot q^3}_{8} = 168 \quad | : 7 | : 3 \quad \underbrace{21}_{8} \Rightarrow b_1 \cdot (1 + 2 + 2^2) = 21 \Leftrightarrow b_1 \cdot 7 = 21 \Leftrightarrow b_1 = 3$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

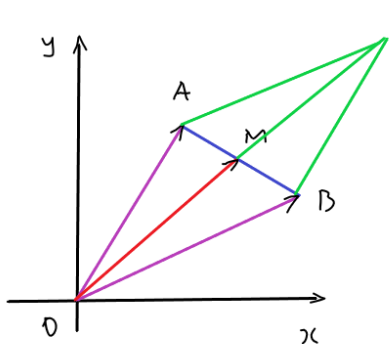
### Vectorul de pozitie al unui punct din plan



$\vec{OP} = \vec{r}_P$  se numeste vectorul de pozitie al punctului P

$$\vec{OP} = (x_P, y_P) = \vec{r}_P$$

### Vectorul de pozitie al mijlocului unui segment



$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} \quad (\text{regula paralelogramului})$$

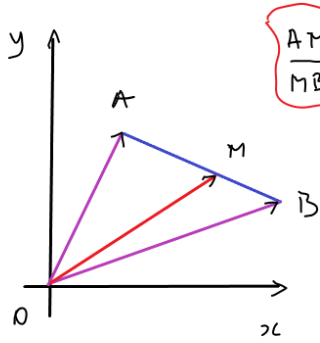
$OC, AB$  diagonalele paralelogramului  $OACB \Rightarrow$

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{2} OC .$$

Deci 
$$\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB}) .$$



Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat



$$\frac{AM}{MB} = k$$

$$\vec{OM} = \frac{1 \cdot \vec{OA} + k \cdot \vec{OB}}{1+k}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{1+k} \cdot \vec{OA} + \frac{k}{1+k} \cdot \vec{OB}$$