

28 sep

Exerciții recapitulare

- 1) Media aritmetică a două numere naturale este 17,5 și unul dintre numere este 7. Determinați al doilea număr.
- 2) Pretul unui telefon mobil a scăzut cu 10% și, după o săptămână, noul preț a scăzut cu încă 10%. După cele două modificări de preț, telefonul costă 81 lei.
 - a) Arătați că prețul inițial al telefonului a fost de 100 lei.
 - b) Cu ce procent din prețul inițial s-a micșorat prețul produsului după cele două săptămâni?
- 3) Determinați valoarea numărului real a știind că punctul $A(2, a)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (2-a) \cdot x + 2$.

Regelware

$$1) \begin{cases} m_a(x, y) = \frac{x+y}{2} = 17,5 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{7+y}{2} = 17,5 \Rightarrow 7+y = 35$$

$$\Rightarrow y = 35 - 7 = 28$$

2) x -nettel initial

$$\text{Dag 1 (sept): } x - x \cdot \frac{10}{100} = x \left(1 - \frac{10}{100}\right) = x \cdot \frac{90}{100} = \frac{9}{10} x$$

$$\text{Dag 2 sept: } \frac{9}{10} x - \frac{9}{10} x \cdot \frac{10}{100} = x \cdot \frac{9}{100} \left(1 - \frac{10}{100}\right) = x \cdot \frac{9^2}{10^2} = \frac{81}{100} x$$

$$a) \frac{81}{100} x = 81 \Leftrightarrow \frac{x}{100} = 1 \Leftrightarrow \underline{x = 100}$$

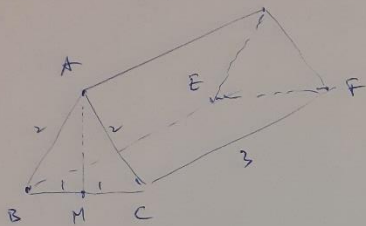
$$b) \begin{array}{ccc} 100 & \dots & 81 \\ 100 & \dots & y \end{array} \Rightarrow y = 81\% \Rightarrow \text{Sra definit cu } 19\% \text{ fața} \\ \text{de nettel initial.}$$

$$3) A(2, a) \in G_f \Rightarrow f(2) = a \Leftrightarrow (2-a) \cdot 2 + 2 = a \Leftrightarrow$$

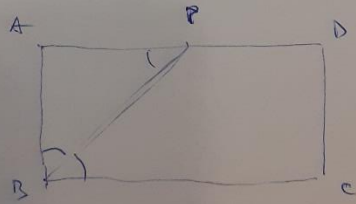
$$\Leftrightarrow 4 - 2a + 2 = a \Leftrightarrow 6 = 3a \Leftrightarrow \underline{a = 2}$$

Exerciții recapitulare

- 1) Fie un corp de formă prismă dreaptă cu baze triunghiuri echilaterale ABC și DEF , se știe $BC=2$, $CF=3$.
- calculați distanța de la A la planul (BCE)
 - calculați volumul corpului.

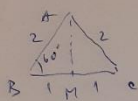


- 2) Fie un teren de formă dreptunghi și are 8 ha. Se reprezintă un zăvoaie $[BP]$ concav ($P \in AD$). Unghiurile ABP și PBC sunt congruente. Raportul dintre aria ΔABP și aria dreptunghiului $ABCD$ este 0,25.
- Exprimați aria terenului în m^2 .
 - Arătați $BC = 2AB$.
 - Calculați lungimea drumului în zăvoaie $[BP]$



1) a) H mijle BC, pismu degete $\Rightarrow AM = \text{dist}(A, (BC))$.

ΔABC echilateral



$$\sin B = \frac{AM}{AB} \quad \Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{AM}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{2} \quad \Leftrightarrow \boxed{AM = \sqrt{3}}$$

$$b) V = A_B \cdot \hat{C} = A_{\Delta ABC} \cdot cF$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ m}^2$$

$$V = \sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \text{ m}^3$$

$$2) 1 \text{ ha} = 100 \text{ m} \cdot 100 \text{ m} = 10.000 \text{ m}^2$$

$$a) 8 \text{ ha} = 80.000 \text{ m}^2$$

$$b) \Delta ABP \text{ isoscel } (\widehat{ABP} = \widehat{APB})$$

$$A_{\Delta ABP} = \frac{AB \cdot AP}{2} = \frac{AB^2}{2}$$

$$A_{ABCD} = AB \cdot AD = AB \cdot BC$$

$$\frac{A_{ABP}}{A_{ABCD}} = 0,25 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB^2}{2AB \cdot BC} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad BC = 2AB$$

$$c) A_{ABC} = \Delta \text{ dreptunghic } \hat{A} \text{ (prozel)} \Rightarrow AB^2 + AP^2 = BP^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2AB^2 = BP^2$$

$$A_{ABCD} = 80000 = AB \cdot BC = 2AB^2 \Rightarrow AB^2 = 40000 \Rightarrow \boxed{AB = 200 \text{ m}}$$

$$\text{Dea } 2 \cdot AB^2 = BP^2 \Rightarrow 80000 = BP^2 \Rightarrow \boxed{BP = 200\sqrt{2} \text{ m}}$$

Lucrare control

1) $(1+0,4)(1-0,4)-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = ?$

(3p)

2) Determinați două numere știind că

(3p) media lor aritmetică este 100, iar raportul celor două numere este $\frac{1}{4}$.

3) Se consideră $f(x) = 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Reprezentați grafic f .

(3p) b) Determinați punctul de pe grafic de abscisă 1.

1p din oficiu.

Sapt. 4 (5 oct-9 oct)

6 oct

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

I. MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1 MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1.1. OPERAȚII ALGEBRICE CU NUMERE REALE

Din clasele anterioare sunt cunoscute următoarele mulțimi de numere:

a) mulțimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$;

b) mulțimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$;

c) mulțimea numerelor raționale: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$;

d) mulțimea numerelor iraționale: $\mathbb{D} \setminus \mathbb{Q}$;

e) mulțimea numerelor reale: $\mathbb{R}$.

Între mulțimile de numere enumerate există următoarele relații:
 $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{D} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{D} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Pe mulțimea numerelor reale s-au definit două operații algebrice: adunarea și înmulțirea.

Adunarea

Operația de adunare pe $\mathbb{R}$ asociază oricărei perechi (x, y) de numere reale un unic număr real, notat $x + y$ și numit **suma** lui x cu y .

PROPRIETĂȚI

Pentru orice numere reale a, b, c au loc următoarele proprietăți:

1) $a + b = b + a$ (adunarea este **comutativă**);

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (adunarea este **asociativă**);

3) $a + 0 = 0 + a$ (0 este **element neutru** pentru adunare);

4) $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (orice număr real a are un **opus**, $-a$).

Înmulțirea

Operația de înmulțire pe $\mathbb{R}$ asociază oricărei perechi (a, b) de numere reale un unic număr real, notat $a \cdot b$ sau ab , numit **produsul** lui a cu b .

PROPRIETĂȚI

Pentru orice numere reale a, b, c au loc proprietățile:

1) $ab = ba$ (înmulțirea este **comutativă**);

2) $(ab)c = a(bc)$ (înmulțirea este **asociativă**);

3) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 este **element neutru** pentru înmulțire);

4) $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$, pentru $a \neq 0$ (orice număr $a \neq 0$ are un **invers**, $\frac{1}{a}$).

Cele două operații cu numere reale sunt legate prin proprietatea de **distributivitate** a înmulțirii față de adunare:

5) $a(b + c) = ab + ac$.

OBSERVAȚII

a) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, se definește **diferența** dintre a și b , notată $a - b$, prin egalitatea $a - b = a + (-b)$ (suma lui a cu opusul lui b).

b) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $b \neq 0$, se definește **câtul** dintre a și b , notat $\frac{a}{b}$ sau $a : b$, prin egalitatea $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ (a înmulțit cu inversul lui b).

c) Din proprietățile celor două operații algebrice se obțin următoarele reguli de calcul cu numere reale, valabile pentru orice numere reale a, b, c :

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a$;

2) $(-a)b = a(-b) = -ab$;
 $(-a)(-b) = ab$;

3) $a(b - c) = ab - ac$ (distributivitatea înmulțirii față de scădere).

d) Pentru $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ se definește:

1) $a \cdot 1 = a$, $a \cdot 2 = a + a$, $a \cdot 3 = a + a + a$, ..., $n \cdot a = (n - 1)a + a$;

$a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a$, ..., $a^n = a^{n-1} \cdot a$ (puterea cu exponent natural).

e) Pentru $a \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{N}$ se definește:

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (puterea cu exponent întreg).

Din proprietățile înmulțirii numerelor reale se deduc următoarele reguli de calcul cu puteri cu exponent întreg.

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci au loc egalitățile:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$.

1) Fie a un număr real pozitiv.

Rădăcina pătrată (radicalul) a numărului real pozitiv a , notată $\sqrt{a}$, este numărul real pozitiv al cărui pătrat este egal cu a .

Asadar $\sqrt{a}$ verifică relațiile: $\sqrt{a} > 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$, ($a > 0$).

Pentru $a = 0$, $\sqrt{0} = 0$.

Câteva reguli de calcul cu radicali

Fie a, b numere reale pozitive. Atunci au loc egalitățile:

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$;

b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$;

c) $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$, $n \in \mathbb{Z}$;

d) introducerea unui factor sub radical:

$$x\sqrt{b} = \sqrt{x^2 b}, \quad x \geq 0, b \geq 0$$

$$x\sqrt{b} = \sqrt{(-x)^2 b}, \quad x < 0, b \geq 0$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

21. Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem:

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

c) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

d) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab(a + b)$;

e) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab(a - b)$.

22. Să se calculeze:

$(2x - y)^2$; $(4 + 2x)^2$;

$(2\sqrt{2} - 3a)(2\sqrt{2} + 3a)$; $\left(\frac{x}{3} + 2y\right)^2$;

$\left(\frac{y}{2} - 4a\right)^2$; $(3x - 2y + \sqrt{5})^2$.

23. Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{C}$ avem:

a) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

b) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

24. Descompuneți în factori:

a) $(3x + 1)^2 - (x + 3)^2$;

b) $(3x + 5)^2 - (x + 1)^2$;

c) $(x + \sqrt{2})^2 - 2$;

d) $(2x + \sqrt{3})^2 - 27$;

e) $(\sqrt{2}x - 1)^2 - 32x^2$; $0 \cdot a^2 - b^2$;

f) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 - (y - 2\sqrt{3})^2$;

g) $14a - 49a^2 + 100b^2 - 1$.

25. Să se arate că:

a) $2x^2 + y^2 + 42x - 4y + 55 = 2$;

b) $x = -2$, $y = 2$;

c) $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 - 1 = 3 \cdot \frac{a+1}{a-1} \cdot 3 \cdot \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$;

d) $3 \cdot \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{a+1}\right) - 3 \cdot \left(\frac{a-1}{a+1}\right) + 1 =$

$= \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$.

26. Să se efectueze:

a) $(\sqrt{3})^2$; $(-\sqrt{5})^2$; $3 \cdot \sqrt{0} \cdot 3$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$;

b) $\left[\frac{6561}{-27 \cdot 9} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 0,4\right]^2$;

c) $\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right)^2$; $\frac{1}{10^2}$.

cu $\{-1, 2\} \cup \{0, 1\} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

17. Cu cât este egală media aritmetică m_a , media geometrică m_g și media armonică m_h a numerelor x, y dacă:

$$a) x = \left\{ \frac{5}{6}, \frac{15}{4}, 0, 75 \right\} \text{ și } y = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12} \right\}$$

$$b) x = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\} \text{ și } y = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12} \right\}$$

$$c) x = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12} \right\} \text{ și } y = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12} \right\}$$

1.2. ORDONAREA NUMERELOR REALE

Reamintim că **axa numerelor** (axa numerelor reale) este o dreaptă pe care s-a ales o origine O , un segment unitate și un sens numit sensul pozitiv. Este cunoscut că fiecărui număr real a i se poate asocia un punct A pe axa numerelor, pentru care a reprezintă abscisa acestuia și scriem $A(a)$.

De exemplu, numerelor reale $0,5$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ li se asociază pe axa numerelor punctele M , N , respectiv P (figura 1).

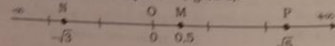


Figura 1

În acest fel se pot reprezenta pe axa numerelor toate numerele reale. Pe a și b numere reale cărora le corespund punctele A și B pe axa numerelor.

Scriem că **a este mai mic decât b** și scriem $a < b$ dacă pe axa numerelor punctul A este la stânga punctului B (figura 2).

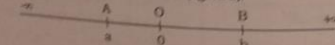


Figura 2

Relația $a < b$ se mai scrie sub forma $b > a$ și se citește „ b este mai mare decât a ”.

Numerelor reale x care corespund punctelor azei aflate la dreapta originii se numesc **numere pozitive** și se folosește notația $x > 0$ (figura 3).



Figura 3

Exerciții rezolvate

1. Fie a și b două numere reale pozitive și $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (media armonică).

$$m_g = \sqrt{ab} \text{ (media geometrică)}, m_a = \frac{a+b}{2} \text{ (media aritmetică)}.$$

Să se demonstreze că: $m_h \leq m_g \leq m_a$ (inegalitatea mediilor).

Soluție

Arătăm că $m_h \leq m_g$. Scriem inegalitatea sub formă echivalentă ajungând la o inegalitate evident adevărată. Se obține succesiv:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Inegalitate adevărată. Așadar, $m_h \leq m_g$.

Demonstrăm că $m_g \leq m_a$ urmând scrierea sub formă echivalente.

$$\text{Avem succes: } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Inegalitate adevărată.

Rezultă că $m_h \leq m_g \leq m_a$.

EXERCIIU ȘI PROBLEME

EXERSARE

21. Fie a și b numere reale pozitive. Să se ordoneze de la cel mai mic la cel mai mare numerele: $a, b, \frac{a+b}{2}, \sqrt{a^2+b^2}$.

22. Fie a, b numere reale pozitive. Să se arate că:

$$a) \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{2};$$

$$b) m_h \leq m_g \leq m_a;$$

$$c) m_h \leq \frac{m_a+m_g}{2} \leq m_a.$$

23. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze că:

$$a) \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2};$$

$$b) \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6;$$

24. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze că:

$$a) (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc;$$

$$b) a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) \geq 6abc;$$

25. Dacă $0 < a < b$ să se arate că:

$$a) m_h - m_g \leq \frac{(b-a)^2}{4a};$$

$$b) m_h - m_g \leq \frac{(b-a)^2}{8a};$$

26. Fie a, b, x, y numere reale. Atunci are loc inegalitatea:

$$a) (ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

(Inegalitatea Cauchy-Burjakowski-Schwarz).

$$b) \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2} \leq \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2}$$

(Inegalitatea lui Minkowski).

APROFUNDARE

27. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze că:

$$a) \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2};$$

$$b) \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6;$$

$$c) \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6;$$

28. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive să se demonstreze că:

$$a) (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc;$$

$$b) a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) \geq 6abc;$$

$$c) (a^3+b^3+c^3) \geq 3abc;$$

Numerelor reale y care corespund punctelor azei aflate la stânga originii se numesc **numere negative** și se folosește notația $y < 0$ (figura 3).

PROPRIETĂȚI

Relația „ $<$ ” definită pe $\mathbb{R}$ are proprietățile:

1. Legea de trihotomie

Oricare ar fi numerele reale a, b are loc una și numai una dintre relațiile: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

2. Proprietatea de tranzitivitate

Dacă numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfac relațiile $a < b$, $b < c$, atunci $a < c$.

OBSERVAȚII

Din legea de trihotomie rezultă că dacă a nu este mai mare decât b , atunci a poate fi mai mic decât b sau egal cu b și se scrie $a \leq b$ (se citește „ a mai mic sau egal cu b ”).

Așadar, $a \leq b$ dacă și numai dacă $a < b$ sau $a = b$.

În loc de $a \leq b$ se mai scrie $b \geq a$ (se citește „ b mai mare sau egal cu a ”).

Relația „ $\leq$ ” (mai mic sau egal) definită pe $\mathbb{R}$ are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitatea

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \leq a$.

2. Antisimetria

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.

3. Tranzitivitatea

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \leq b$, $b \leq c$, atunci $a \leq c$.

Relația „ $\leq$ ” definită pe $\mathbb{R}$, care satisface aceste proprietăți se numește **relație de ordine pe $\mathbb{R}$** .

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Se spune că **relația de ordine pe $\mathbb{R}$ este totală**.

Proprietățile de compatibilitate între operațiile algebrice și relația de ordine pe $\mathbb{R}$:

• Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \leq b$, atunci $a+x \leq b+x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

• Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \leq b$, atunci $ax \leq bx$, $\forall x \geq 0$.

Din proprietățile operațiilor algebrice și cele ale relației de ordine „ $\leq$ ” se deduc toate regulile calculului algebric și ale calculului cu inegalități.

Reamintim câteva reguli uzuale ale calculului cu inegalități:

• dacă $a \leq b$, atunci $-a \geq -b$;

• dacă $a \leq b$ și $x < 0$, atunci $ax \geq bx$ și $\frac{a}{x} \geq \frac{b}{x}$;

• dacă $0 < a \leq b$, atunci $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$;

• dacă $0 < a \leq b$ și $0 < c \leq d$, atunci $ac \leq bd$ și $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}$;

• dacă a și b au același semn, atunci produsul ab este pozitiv;

• dacă a și b au semne diferite, atunci produsul ab este negativ.

Exerciții rezolvate

1. Fie a și b două numere reale pozitive și $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (media armonică).

$$m_g = \sqrt{ab} \text{ (media geometrică)}, m_a = \frac{a+b}{2} \text{ (media aritmetică)}.$$

Să se demonstreze că: $m_h \leq m_g \leq m_a$ (inegalitatea mediilor).

Soluție

Arătăm că $m_h \leq m_g$. Scriem inegalitatea sub formă echivalentă ajungând la o inegalitate evident adevărată. Se obține succesiv:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Inegalitate adevărată. Așadar, $m_h \leq m_g$.

Demonstrăm că $m_g \leq m_a$ urmând scrierea sub formă echivalente.

$$\text{Avem succes: } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Inegalitate adevărată.

Rezultă că $m_h \leq m_g \leq m_a$.

EXERCIIU ȘI PROBLEME

EXERSARE

21. Fie a și b numere reale pozitive. Să se ordoneze de la cel mai mic la cel mai mare numerele: $a, b, \frac{a+b}{2}, \sqrt{a^2+b^2}$.

22. Fie a, b numere reale pozitive. Să se arate că:

$$a) \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{2};$$

$$b) m_h \leq m_g \leq m_a;$$

$$c) m_h \leq \frac{m_a+m_g}{2} \leq m_a.$$

23. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze că:

$$a) \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2};$$

$$b) \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6;$$

$$c) \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6;$$

24. Fie a, b, x, y numere reale. Atunci are loc inegalitatea:

$$a) (ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

(Inegalitatea Cauchy-Burjakowski-Schwarz).

$$b) \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2} \leq \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2}$$

(Inegalitatea lui Minkowski).

APROFUNDARE

27. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze că:

$$a) \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2};$$

$$b) \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6;$$

$$c) \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6;$$

28. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive să se demonstreze că:

$$a) (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc;$$

$$b) a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) \geq 6abc;$$

$$c) (a^3+b^3+c^3) \geq 3abc;$$

$$c) 2(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b)ab +$$

$$+ (b+c)bc + (a+c)ac;$$

$$d) a^3+b^3+c^3 \geq ab+ac+bc.$$

29. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere pozitive. Să se arate că:

$$\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n}.$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

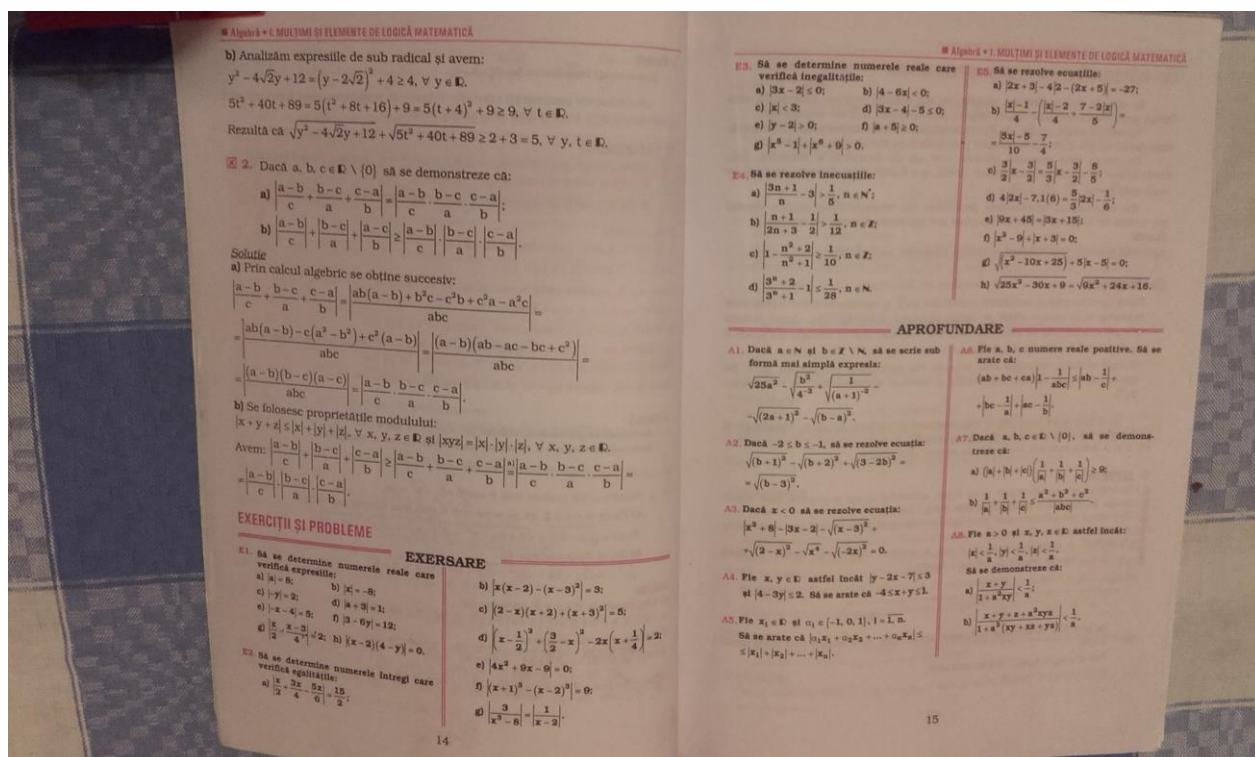
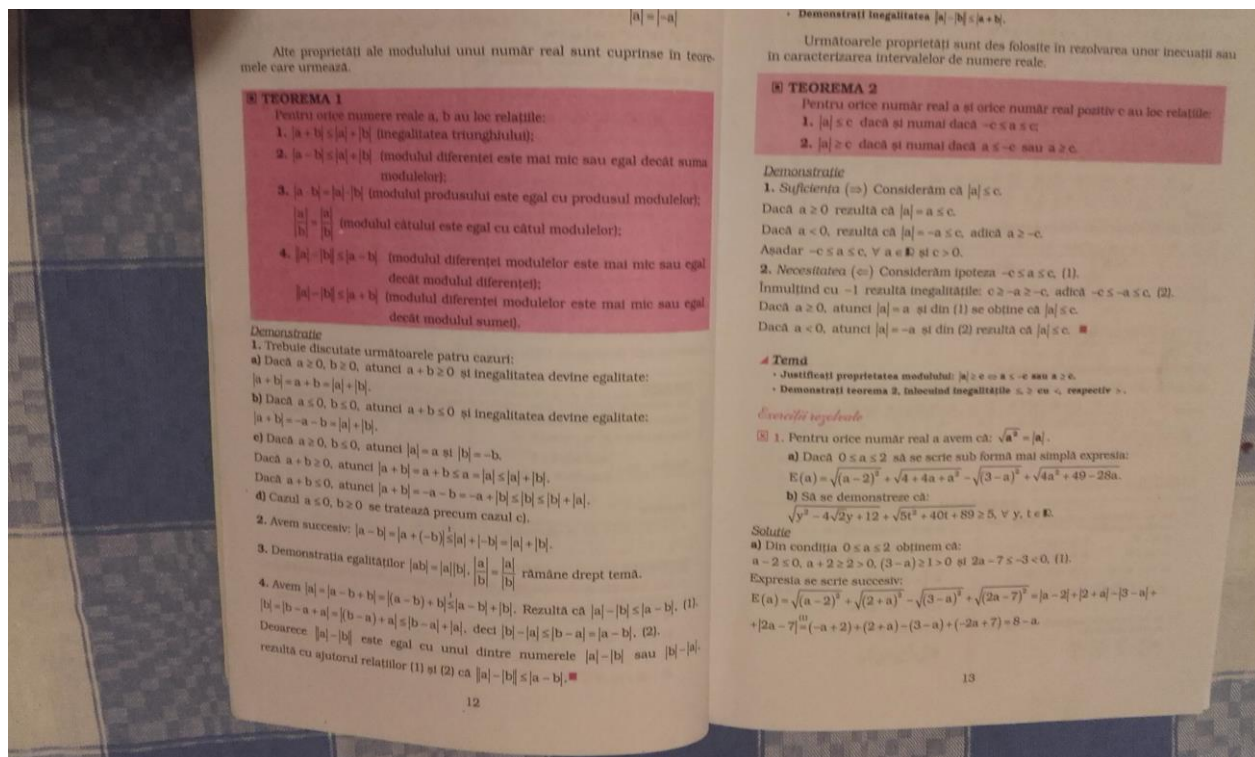
$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$+ \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} ($$



Tema: din manual pag.7 /E4,E6, pag.15/E5

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\} \text{ m. numerelor NATURALE}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\} \text{ m. m. ÎNȚEGI}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} \text{ m. m. RATIONALE}$$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{ \text{m. ce nu se pot scrie ca o fracție} \} \text{ m. IRATIONALE}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\overline{\mathbb{Q}} \subset$

OPERATII CU NUMERE REALE

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Aplicación:

$$\underbrace{(2x)}_a - \underbrace{y}_b = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (2x)^2 - 2(2x) \cdot y + y^2 =$$

$$= 4x^2 - 4xy + y^2$$

$$\underbrace{(2\sqrt{2}-a)}_x - \underbrace{y}_y = (x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = (2\sqrt{2})^2 - a^2 = 8 - a^2$$

$$\left(\underbrace{\frac{2x}{3}}_a + \underbrace{2y}_b\right)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2x}{3} \cdot 2y + (2y)^2 =$$

$$= \frac{4x^2}{9} + \frac{8}{3}xy + 4y^2$$

$$\underbrace{(2\sqrt{2}-3a)}_x - \underbrace{y}_y = (x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = (2\sqrt{2})^2 - (3a)^2 =$$

$$= 8 - 9a^2$$

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + \underline{ab} + \underline{ac} + \underline{ba} + b^2 +$$

$$+ \underline{bc} + \underline{ca} + \underline{cb} + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc +$$

$$+ 2ac$$

$$\begin{aligned}
 (\underbrace{3x}_a - \underbrace{2y}_b + \underbrace{\sqrt{5}}_c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = \\
 &= (3x)^2 + (-2y)^2 + (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot 3x \cdot (-2y) + 2 \cdot (-2y) \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot 3x \cdot \sqrt{5} = \\
 &= 9x^2 + 4y^2 + 5 - 12xy - 4\sqrt{5}y + 6\sqrt{5}x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3 = \\
 &= a^3 - b^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} + b^3 = \\
 &= a^3 + b^3
 \end{aligned}$$

APPLICAÇÃO

$$\begin{aligned}
 (\underbrace{3x+1}_a)^2 - (\underbrace{x+3}_b)^2 &= a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \\
 &= (3x+1 - (x+3))(3x+1 + x+3) = \\
 &= (3x+1 - x-3)(4x+4) = \\
 &= (2x-2)(4x+4) = 2(x-1) \cdot 4(x+1) = \\
 &= 8(x-1)(x+1) = 8(x^2-1) = 8x^2-8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\underbrace{x^2-2\sqrt{3}x+3}_a) - (\underbrace{y-2\sqrt{3}}_b)^2 &= (\underbrace{x-\sqrt{3}}_a)^2 - (\underbrace{y-2\sqrt{3}}_b)^2 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\
 &= (x-\sqrt{3} - (y-2\sqrt{3}))(x-\sqrt{3} + y-2\sqrt{3}) = \\
 &= (x-\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3})(x-\sqrt{3} + y-2\sqrt{3}) = \\
 &= (x-y+\sqrt{3})(x+y-3\sqrt{3})
 \end{aligned}$$